IESE
Universidad de Navarra
Barcelona-Madrid

0-192-014
ADN-225

DISTRIBUCION DE STUDENT Y NORMAL–GAMMA (*)

Distribución de Student. Función densidad

Diremos que los valores x de una función de observación X, siguen una distribución de Student si su función densidad viene dada por:

$$\varphi(x) = k \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}$$

para todo $x \in R$.

El factor k vale:

$$k = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\nu}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

Queda determinada dicha función densidad al conocerse μ, σ, ν.

Para referirnos a la distribución de Student, utilizaremos las notaciones $St\,(x \mid \mu,\sigma,\nu)$ o $St\,(X \mid \mu, \sigma, \nu)$. Como siempre, X representa a la función de observación y x a sus valores. Los valores x se distribuyen según una ley de Student o la función de observación X tiene una distribución de Student.

Como veremos más adelante, σ no es exactamente la desviación tipo de X. Entre la varianza de X y el parámetro σ existe la relación

---

(*) Nota técnica de la División de Investigación del IESE.
Preparada por el profesor Pere Agell. Septiembre de 1991.

$$V(x) = \frac{\nu}{\nu - 2}\,\sigma^2$$ para n>2

Además

$$\lim_{\nu \to \infty} St(x \mid \mu, \sigma, \nu) = N(x \mid \mu, \sigma)$$

Función de Student reducida

Haciendo en

$$k \int_{-\infty}^{x} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}(\nu + 1)} dx$$

el cambio $t=(x-\mu)/\sigma$, tenemos

$$C \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dt$$

donde

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi \nu}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

Podemos, pues, escribir como función densidad de Student reducida:

$$\varphi_{St}(t \mid 0, 1, \nu) = \varphi_{St}(t \mid \nu) = C\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}$$

También se verifica:

$$\lim_{\nu \to \infty} St(t \mid \nu) = N(t \mid 0, 1)$$

Representación de algunas funciones densidad de Student según los valores de ν

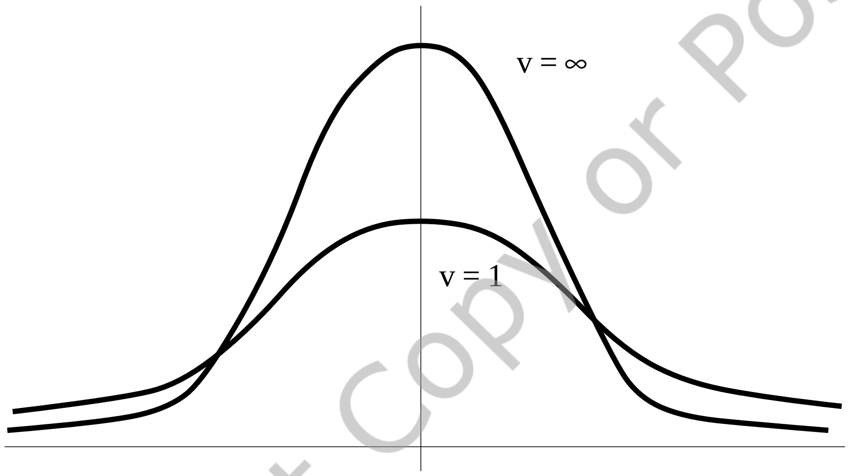
Su representación es parecida a la normal. Más achatada cuanto más pequeño sea $\nu > 0$.

Para $\nu > 0$

$$M(t) = \text{Mediana}\ (t) = \text{Moda}\ (t) = 0$$

El máximo de $\varphi(t)$ se encuentra para $t = 0$ y vale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\,\nu}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$



Para $\nu = \infty$ la $N(t \mid 0, 1)$.

Funciones distribución

La función de probabilidad acumulada de la distribución de Student general $St(x \mid \mu,\sigma,\nu)$ viene dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du = k \int_{-\infty}^{x} \left[1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} dx$$

Y la de la reducida $St(t \mid \nu)$, por:

$$F(t) = C \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{u^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} du$$

Esta última función viene tabulada.